* المصفوفات والمحددات : MARTICes and Determinents

$$*\ a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = b_2$$
$$- - - - - - - - - - - -$$
$$a_{n1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n = b_n$$

$$Ax = b \ , \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} , \ X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} , \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A\ x = b \Rightarrow x = b \cdot A^{-1}}$$

* المصفوفة « MATric »

نعلم النمط $(M \times n)$ هي بالتعريف جدول مكونة من m سطر و n عمود ويرمز لها :

$\boxed{A(a_{ij})}$ حيث $i = 1, 2, \ldots n$, $j = 1, 2, \ldots n$

حيث الدليل (i) يشير إلى عدد الأسطر ويسمى الدليل السطري .

و الدليل (j) يشير إلى عدد الأعمدة ويسمى الدليل العمودي .

* منقولة مصفوفة : « Matric Transport »

هي مصفوفة ناتجة عن A بجعل أسطرها أعمدة أو الأعمدة أسطر وغالباً مانرمز لها A^{-1}

← المصفوفة تبقى رمزاً رياضياً ليس له قيمة عددية كما هو في المحددات وإذا كانت

تتألف من أعداد حقيقية نقول عنها أنها مصفوفة (حقيقية) (Real Matric)

← إذا كانت A مصفوفة من المرتبة n فإننا نرمز ب $\det(A)$ لمحدد المصفوفة A أي أنه :

$$\det(A) = |A|$$

Scanned by CamScanner

← نقول عن المصفوفة A أنها مصفوفة نظامية (Regular) إذا كانت قيمة محددها مختلفة عن الصفر وإلا فإن المصفوفة A هي مصفوفة شاذة (Singular)

← جداء المصفوفة :

$$\underbrace{A}_{m\times n} \cdot \underbrace{B}_{n\times p} = \underbrace{C}_{n\times p}$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

* جداء المصفوفات عموماً غير تبديلي $(AB \neq BA)$

.. بعض الحالات الخاصة تبقى الخاصية التبديلية .. محققة :

⊛ $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ ⊛ $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n$

← إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين من درجة واحدة وكان لهما المعكسان على الترتيب A^{-1} و B^{-1} فإنه :

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

← إذا كانت المصفوفة A من النمط $m\times n$ حيث $(\det A \neq 0)$ فإننا نسمي A^{-1} مقلوب المصفوفة أو معكوس المصفوفة A وذلك إذا تحقق $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n$

$$A \text{ is Invertable} \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$$

⊛ آلية إيجاد مقلوب مصفوفة :

- نحدد $\det(A)$ فإذا كان مساوي للصفر تكون المصفوفة شاذة ولا يوجد لها مقلوب أما إذا كانت $\det A$ مغاير للصفر فإننا نجري الخطوات التالية :

② نحدد المصفوفة المساعدة (A^*) (Adjaint Matric) على النحو التالي تشكل :

م - نبدل عناصر المصفوفة A بالمحددات الصغرى والموافقة لهذه العناصر ثم نحول الأسطر أعمدة وينتج عن ذلك :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

③ نقسم جميع عناصر المصفوفة المساعدة على $\det(A)$ فينتج المطلوب :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$$

Scanned by CamScanner

Ex $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ، أوجد $(2A - 3B)$ و (A^T) و $(A+B)$ ؟

الحل

$A+B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $2A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $3B = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ -6 & 9 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$,

$2A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & -21 \\ 6 & -7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Ex_2 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ أوجد $(A \cdot B)$

الحل قبل الضرب التأكد بأن عدد الأسطر = عدد الأعمدة.

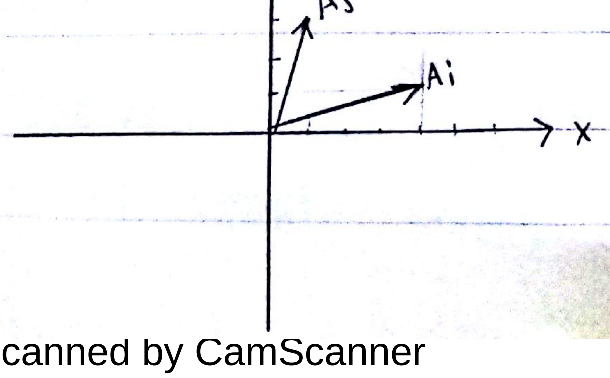
- السطر الأول بالعمود الأول بجمعن وبطلع معي الصف الأول (1)
- السطر الأول " " " الثاني " " " الثاني (0)
- السطر الأول بالعمود الثالث " " " " الثالث (0)
- السطر الثاني " الأول " " " الرابع (3) وهكذا!

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Ex_3 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ، $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3

أوجد Ai و Aj Describethem Geomtirically (وصفها رسم هندسي)

الحل $Ai = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. $Aj = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$



Scanned by CamScanner

* find the inverte : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Ex4)

$A_{11} = 1$, $A_{12} = 0$, $A_{13} = 1$, $A_{21} = 0$, $A_{22} = 2$, $A_{23} = 1$, (حل)

$A_{31} = 1$, $A_{32} = 1$, $A_{33} = 1$, $\det|A| = 1$, $1 \neq 2$

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{2} A^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Scanned by CamScanner